

Занятие 16. Принцип Дирихле

Иоганн Петер Густав Лежён-Дирихле – немецкий математик XIX века. Он и сформулировал принцип (мы называем его ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ), который чаще всего почему-то излагают в виде истории про зайцев (или кроликов), сидящих в клетках. При решении многих задач нередко удаётся успешно применить принцип Дирихле, правильно подобрав «клетки» и «зайцев». Принцип Дирихле применяется в разных разделах математики: в арифметике, в комбинаторике, в геометрии. Познакомимся с некоторыми изюминками решения задач на принцип Дирихле

Если $(n+1)$ кролика рассадить в n ящиков, то найдется ящик, в которой сидит не менее двух кроликов.

1. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа $-1, 0, 1$. Рассмотрим восемь сумм: сумма трех чисел в каждой строчке, каждом столбце и по двум главным диагоналям таблицы. Доказать, что среди них найдутся две одинаковые.
2. На шахматной доске размером 8×8 расставлены 14 фишек. Докажите, что найдется квадрат 2×2 , в котором нет фишек. (Фигура внутри клетки 1×1).
3. Верно ли, что из шести любых целых чисел найдутся два числа, разность которых делится на 5?
4. В классе 32 ученика. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы 2 ученика, фамилии которых начинаются с одной буквы?

Дополнительная задача

5. В классе 30 учеников. Во время контрольной работы Петя сделал 13 ошибок, а остальные – меньше. Какое наибольшее количество одноклассников, допустивших поровну ошибок, можно гарантировать?

Домашнее задание

6. Дед Мазай в половодье спас 57 зайцев и привёз к себе на ферму. В клетке может разместиться не более 7 зайцев. Сумеет ли дед Мазай обеспечить комфортные условия для спасённых зверушек в своих 8 клетках?
7. Дед Мазай решил улучшить жилищные условия 57 спасённых зайцев и построил им 20 новых клеток в дополнение к 8 старым. Сможет ли дед Мазай расселить зайцев так, чтобы в каждой клетке жили хотя бы два зайца?
8. Дед Мазай засеял морковью 50 грядок, причём на каждой выросло не больше 40 морковок. Какие из перечисленных утверждений являются верными?
 - а) Нет грядок, на которых число выросших морковок совпадает.
 - б) Найдутся грядки, на которых число выросших морковок совпадает.
 - в) Найдётся ровно 2 грядки, где число выросших морковок совпадает.
 - г) Найдётся не менее 3 грядок, где число выросших морковок совпадает.