

1. Докажите, что для любых чисел x и y выражение $x^2 - xy + \frac{2}{7}y^2$ положительно или равно нулю.
2. Докажите неравенство $x^2 + 2xy + 5 + 2y^2 + 2y > 0$.
3. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен $\frac{5}{2}$. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$.
4. Рассмотрим все функции $f(x) = x^2 + px + q$, у которых $p + q = 2021$. Докажите, что графики всех этих функций проходят через одну точку.
5. Известно, что разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 2022. Сколько корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?
6. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + b + c > 0$. Найдите знак коэффициента c .
7. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + c < b$. Найдите знак коэффициента c .
8. Верно ли, что если $b > a + c > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?

Дополнительные задачи

1. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ с рациональными коэффициентами имеет корень $1 + \sqrt{3}$. Найдите a и b .
2. Существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет корень, а сумма любых двух из них корней не имеет?
3. Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трёх последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере ещё в одной целой точке.
4. Может ли вершина параболы $y = 4x^2 - 4(a + 1)x + a$ лежать во второй координатной четверти при каком-нибудь значении a ?