Антипараллельность

9-10 классы

ДЕНЬ ВТОРОЙ

23 марта 2022

Карпенко Ю.А.

Определение. Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC, причём A или внутри обоих отрезков BB_1 и CC_1, или вне обоих. Будем говорить, что прямые B_1C_1 и BC антипараллельны относительно пары прямых AB и AC (или относительно угла BAC), если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$.

Утверждение 1. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1, C_1, B и C лежат на одной окружности.

Утверждение 2. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1C_1 параллелен касательной к описанной окружности треугольника ABC в точке A.

Утверждение 3. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда треугольники ABC и AC_1B_1 подобны. Иначе говоря, один из этих треугольников можно перевести в другой, выполнив симметрию относительно биссектрисы угла A и затем гомотетию с центром в точке A.

1. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через них проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, а вторую – в точках B и D. Докажите, что $AC||BD$.
2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC параллельна прямой B_1C_1.
3. Окружность, проходящая через вершины A и B параллелограмма $ABCD$ пересекает его диагонали в точках P и Q. Докажите, что точки P, Q, C и D лежат на одной окружности.
4. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты, а AA_2 и BB_2 – биссектрисы треугольника ABC. Известно, что $A_1B_1||A_2B_2$. Докажите, что $AC = BC$.
5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.
6. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X, а прямые A_3A_5 и A_1A_6 – в точке Y . Докажите, что прямые A_1A_2 и XY параллельны.
7. Пусть $ABCD$ – трапеция, $AD||BC$. Докажите, что описанная окружность треугольника ABD касается прямой CD тогда и только тогда, когда описанная окружность треугольника BCD касается прямой AB.
8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Прямая A_1B_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что $CP = CQ$.