Методы:

1. Разложение на множители
2. Выделение полного квадрата
3. Метод разбиения
4. Метод подстановки
5. Замена переменной
6. Упорядочивание переменных
7. (*Неравенство Коши*) Среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. Причем равенство достигается только в случае равенства всех аргументов
   Для $x_1, \dots, x_n \geq 0$ верно, что $\frac{x_1+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$.
8. (*Неравенство о средних*) Средние упорядочены по невозрастанию: квадратическое, арифметическое, геометрическое, гармоническое. Причем равенство достигается только в случае равенства всех аргументов. Для положительных x_i верно:
$$\max\{x_1, \dots, x_n\} \geq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \geq \min\{x_1, \dots, x_n\}.$$
9. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (Неравенство КБШ)
   Для любых $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ справедливо
$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2$$
   Доказательство: рассмотрим квадратное уравнение
   $(a_1 x - b_1)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2 = 0$.
   (Неравенств КБШ в виде дробей) Для любых $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n > 0$ справедливо
$$\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}$$
10. Транснеравенства
    Последовательности чисел $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ называются *одномонотонными*, если «под» большим числом первой последовательности «стоит» большее число второй последовательности, «под» вторым по величине «стоит» второе по величине и т.д.
    Аналогично определяются *разномонотонные* последовательности.

    Сверткой последовательностей $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_n)$ называется сумма $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$, которая обозначается $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}$.

    (Транснеравенства) Если $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$ – одномонотонны, то $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \dots & b_{i_n} \end{bmatrix}$, где $(i_1, \dots, i_n)$ – произвольная перестановка чисел $(1, 2, \dots, n)$.

    Если $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$ – разномонотонны, то $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \dots & b_{i_n} \end{bmatrix}$, где $(i_1, \dots, i_n)$ – произвольная перестановка чисел $(1, 2, \dots, n)$.

Примеры

1. Докажите, что $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$ для $x, y \geq 0$.
2. Докажите, что $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ для $x, y \in [0,1]$.
3. Докажите, что $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ для $a, b, c \geq 0$.
4. Докажите, что $(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + \text{c}) \geq 16abc$, для $a, b, c \geq 0$.
5. Докажите, что $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$ для $x, y > 0$.
6. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+b}}$ для $a, b > 0$.
7. Докажите, что $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$, для $a, b, c > 0$.
8. Докажите, что $\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ для $x_1, \dots, x_n \geq 0$.
9. Известно, что $a + 2b + 3c + 10d + 15e + 41f \geq 2020$. Найдите минимум выражения $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$.
10. Докажите, что если (a_1, a_2) и (b_1, b_2) одномонотонны, то $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}$.
11. Выясните, одномонотонны, противомонотонны ли последовательности:
    a. (a, b) и (a, b),
    b. (a, b) и (a^3, b^3),
    c. (a, b) и $(\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$, $a, b \geq 0$
    d. (a, b, c) и $(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b})$, $a, b, c > 0$.
12. Докажите, что $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
13. Докажите, что $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$, для $a, b \geq 0$.

Задачи

85. Докажите, что $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq x + y + z$ для $x, y, z > 0$.

86. Докажите, что $(a^2 - b^2)(a^4 - b^4) \leq (a^3 - b^3)^2$ для любых a, b.

87. Докажите, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$ для $a, b > 0$.

88. Докажите, что $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ для $x, y \geq 0$.

89. Докажите, что $8(x + y + z)^3 \geq 27(x + y)(y + z)(z + x)$ для $x, y, z \geq 0$.

90. Докажите, что $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq 2$ для $x, y, z > 0$.

91. Докажите, что $\sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + b^2} \geq 1 + ab$ для любых a, b.

92. Докажите, что $\max(a, b) \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geq \min(a, b)$ для $a, b > 0$.

93. Докажите, что $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$ для $a, b, c, d > 0$.

94. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$ для $a, b, c \geq 0$.

95. Докажите, что $\frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \geq a + b + c$ для $a, b, c > 0$.