Перестрелка

1. У скольких трёхзначных чисел цифра сотен меньше цифры десятков?
   Ответ. 360
   Решение. Если в разряде сотен 1, то в разряде десятков одна из цифр от 2 до 9. Это 8 вариантов. А в разряде единиц – от 0 до 9. То есть 10 вариантов. Получаем $1 \cdot 8 \cdot 10$. Аналогично для остальных случаев: $8 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + \dots + 1 \cdot 10 = 360$.
2. На бесконечной ленте выписаны в порядке возрастания все натуральные числа с суммой цифр 101. Найдите последнюю цифру числа, которое написано на 12-м месте?
   Ответ. 8
   Решение. Так как 101 = 9·11+2, то самым маленьким числом с суммой цифр 101 будет 29...9 (11 девяток), а вторым по величине — число 389...9 (10 девяток). В 10 следующих по величине числах с суммой цифр 101 восьмёрка «путешествует» из начала в конец ряда девяток, каждый раз смещаясь на один знак. Через 10 шагов она окажется в конце числа, что и даёт нам ответ. На 12-ом месте будет написано число 39...98 (10 девяток).
3. Кенгуру-мама прыгает за 1 секунду на 4 метра, а ее маленький сынишка прыгает на 1 метр за треть секунды. Они одновременно стартовали от скамейки перед их домиком и двигаются к эвкалиптовому дереву по прямой. Расстояние от скамейки до дерева равно 180 м. Сколько секунд мама будет ждать сына под деревом?
   Ответ. 495
   Решение. Мама преодолеет расстояние за 180:4=45 с., а её сынишка – за 180·3=540 с.
4. Вчера вечером Петя вспомнил про домашнее задание. У него оставалось мало времени перед сном. На первую задачу Петя потратил половину оставшегося до сна времени и ещё 1 минуту; потом на вторую задачу он потратил половину оставшегося времени и ещё 2 минуты; наконец, на третью задачу он потратил половину оставшегося времени и ещё 3 минуты. Сразу после этого он как раз успел лечь спать вовремя. За сколько минут до сна Петя вспомнил про домашнее задание?
   Ответ. 34
   Решение. Перед третьей задачей Пете оставалось до сна 3 минуты и ещё столько же - всего 6 минут. Перед второй задачей до сна оставалось 6+2=8 минут и ещё столько же – всего16 минут. Наконец, перед первой задачей до сна оставалось 16+1=17 минут и ещё столько же – значит, первоначально до сна оставалось 34 минуты.
5. Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет (и отдал их второму), потом второй проиграл половину своих (и отдал их первому). В результате у первого оказалось 45 монет, а у второго — 27. Сколько монет было у первого?
   Ответ. 36
   Решение. Проследим ''с конца'', сколько у каждого пирата было монет после каждой игры. В последней игре второй проиграл первому половину своих монет, после чего у него осталось 27 монет. Но это ровно столько, сколько он только что отдал первому!

Значит, перед этим у второго было 27·2=54 монеты, а у первого было 45-27=18 монет.
Аналогично в первой игре первый пират проиграл ровно столько, сколько у него осталось после этой игры, то есть 18 монет. Получаем, что перед первой игрой у первого пирата было 18·2=36 монет, а у второго было 54-18=36 монет. Значит, вначале у пиратов было по 36 монет.

6. Когда до полного числа дюжин не хватило 2 яиц, их пересчитали десятками. Осталось 6 яиц. Сколько было яиц, если их было больше 300, но меньше 400? Найдите все возможности.
Ответ. 346.
Решение. Число 300 делится и на 10, и на 12. По условию искомое число делится на 12 с остатком 6. Первое такое число – это 310, а каждое следующее на 10 больше. Получаем числа: 310, 322, 334, 346, и так далее. Число 346 подходит, а следующее число будет через НОК(10, 12)=60. 346+60>400.
7. Найдите восемь последовательных целых чисел, сумма первых пяти из которых равна сумме остальных трёх. В ответе укажите сумму всех восьми чисел.
Ответ. 60.
Решение. Составим уравнение:
$$x+(x+1)+\cdots+(x+4)=(x+5)+(x+6)+(x+7)$$
$$5x+10=3x+18$$
$$2x=8$$
$$x=4.$$
Считаем ответ.
$$4+\cdots+11=60.$$
8. Каждую звездочку в выражениях, указанных ниже, нужно заменить знаком + или − так, чтобы равенство стало верным. Выберите те выражения, для которых это возможно.
1) 7*1*0*2*0*2*1=0; 2) 7*2*1*2*1*2*1=0;
3) 9*6*3*1*3*6*9=0; 4) 1*2*3*4*3*2*1=0.
В ответ укажите число, полученное из цифр – номеров пунктов, для которых равенство возможно. Например, **123** или **34**. Цифры ответа должны идти в порядке возрастания.
Ответ. 24
Решение. Равенство 7*1*0*2*0*2*1=0 невозможно превратить в верное, так как в его левой части ровно 3 нечётных числа. Сумма чисел в левой части нечётна. А если в сумме заменить некоторые знаки + на -, то чётность результата не изменится. чётное число 0 получиться не может.
Равенство 7*2*1*2*1*2*1=0 можно превратить в верное. Например, так: 7-2-1-2+1-2-1=0.
Равенство 9*6*3*1*3*6*9=0 невозможно превратить в верное, так как все числа нём, кроме одного, делятся на 3. То есть левая часть не делится на 3, а правая -- делится.
Равенство 1*2*3*4*3*2*1=0 можно превратить в верное. Например, так: 1+2+3-4-3+2-1=0.
9. Из числа 100...0 (22 нуля) вычли число 22. Чему равна сумма цифр полученной разности?
Ответ. 195.

Решение. Первые 20 нулей превратятся в девятки, а последние две цифры – это 7 и 8. Получаем ответ: $20 \cdot 9+7+8=180+15=195$.

10. В выражении 1 * 2 * 3 * 4 * 5 звёздочки заменили на плюсы и минусы. Возможно, все знаки одинаковы. Сколько различных значений при этом могло принимать полученное выражение?
    Ответ. 13
    Решение. Если заменить все звёздочки на плюсы, то получится 15. Если заменить все звёздочки на минусы, то получится -13. Заметим, что чётные значения получить нельзя, так как среди пяти данных чисел три нечётных. Осталось проверить, можно ли получить нечётные числа от -13 до 15. Оказывается, что получить можно все эти числа, кроме двух, а именно, кроме -11 и 13. Ведь для получения 13 нужно уменьшить 15 на 2. Для этого нужно изменить знак перед 1, но перед ней звёздочки нет.
    Число -11 получить нельзя, так как -11 на 2 больше, чем -13. Но как увеличить -13 лишь на 2? В выражении $-13 = 1 - 2 - 3 - 4 - 5$ нужно изменить знак перед 1, а это невозможно.
    Вот все 13 нечётных чисел, которые можно получить:
    $$-13 = 1 - 2 - 3 - 4 - 5;$$
    $$-9 = 1 + 2 - 3 - 4 - 5;$$
    $$-7 = 1 - 2 + 3 - 4 - 5;$$
    $$-5 = 1 - 2 - 3 + 4 - 5;$$
    $$-3 = 1 - 2 - 3 - 4 + 5;$$
    $$-1 = 1 + 2 - 3 + 4 - 5;$$
    $$1 = 1 - 2 + 3 + 4 - 5;$$
    $$3 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5;$$
    $$5 = 1 - 2 - 3 + 4 + 5;$$
    $$7 = 1 + 2 + 3 - 4 + 5;$$
    $$9 = 1 + 2 - 3 + 4 + 5;$$
    $$11 = 1 - 2 + 3 + 4 + 5;$$
    $$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$$

11. Найдите все натуральные числа такие, что если к ним прибавить их наименьший делитель, больший единицы, то получится 52.
    Ответ. 50.
    Решение. Наименьший делитель, больший единицы, – простое число. Если каждое из слагаемых делится на него, то и сумма делится. У числа 44 два простых делителя: 2 и 11. Возможные варианты искомых чисел: 52-2=50; 52-13=39. Число 50 подходит, а у числа 39 наименьший простой делитель – это 3.
12. В подъезде на первом этаже 3 квартиры, а на всех остальных этажах по 5 квартир. На каком этаже находится квартира с номером 71?
    Ответ. 15
    Решение. 71-2=69. $69=5 \cdot 13+4$. То есть 1ый этаж, ещё 13 полных этажей. И на следующем – 15м находится квартира с номером 71.
13. Шесть различных натуральных чисел таковы, что произведение любых трёх из них чётно, а сумма всех шести - нечётна. Какова наименьшая возможная сумма всех этих чисел?
    Ответ. 31

Решение. Нечётных чисел не больше двух (произведение трёх нечётных чисел -- нечётное число), и, кроме того, их количество нечётно. Значит, нечётных чисел ровно одно, а чётных – пять. Теперь понятно, что наименьшая сумма -- у набора 1, 2, 4, 6, 8, 10. Она равна 31.

14. Чебурашка пошел на день рождения к Крокодилу Гене. Когда он прошел треть пути, он вспомнил, что забыл дома подарок и вернулся. Поэтому он опоздал к Гене на 20 минут. За какое время в минутах Чебурашка мог прийти к Гене, если бы не был таким забывчивым?
    Ответ. 30.
    Решение. Гена прошёл 1/3 пути до того, как вспомнил про подарок, потом еще 1/3 пути и, наконец весь путь. Всего он прошёл в и 2/3 пути больше, чем планировал. Эти 2/3 пути у него заняли 20 минут, значит на весь путь он тратит 30 минут.
15. Бабушка пекла блины. Внук пришел из школы и тут же принялся их есть. Пока он съедает четыре блина, бабушка успевает испечь только три. Когда внук пришел из школы, на тарелке было 17 блинов. Сколько блинов съел внук, если он ушел, когда на тарелке было 7 блинов?
    Ответ. 40.
    Решение. Число блинов уменьшилось на 10, значит 10 раз внук съел про 4 блина, а бабушка успевала испечь за это время по 3 блина.
16. В некотором классе учатся 26 школьников. Ребята решили выбрать такой месяц года, на который приходится наибольшее количество их дней рождения. Какое наибольшее число дней рождения в этом месяце можно гарантировать?
    Ответ. 3.
    Решение. По условию в классе 26 школьников, каждый из которых родился в одном из 12 месяцев.
    Значит, 26 ($n \cdot k+1=26$) элементов распределены по 12 подмножествам ($n=12$).
    Попробуем применить обобщённый принцип Дирихле: $26=12 \cdot 2+2$, то есть $k=2$.
    Если бы ребят было 25, то обобщённый принцип Дирихле позволил бы доказать, что найдётся месяц, в котором родились хотя бы $k+1=3$ школьника. Но если для 25 такой месяц найдётся, то и для 26 - тоже.
    Казалось бы, задача решена. Но нет!
    Мы сделали лишь оценку: ответ не меньше 3.
    Осталось доказать, что 3 - наибольшее число дней рождения в одном месяце, которое можно гарантировать.
    Достаточно привести хотя бы один пример, когда в каждом из 12 месяцев свой день рождения отмечают не более 3 школьников. Для начала пусть в каждом месяце день рождения отмечает по 2 школьника. Осталось выбрать месяцы ещё для двоих ребят. Пусть они родились соответственно в январе и в феврале. Вот и получился пример.
17. В классе 38 человек. Из них 16 умеют играть в баскетбол, 17 - в хоккей, 18 - в волейбол.
    Увлекаются только двумя видами спорта:
    баскетболом и хоккеем – 4;
    баскетболом и волейболом – 3;
    волейболом и хоккеем – 5.
    Трое не играют ни в баскетбол, ни в хоккей, ни в волейбол.

Сколько человек увлекаются всеми тремя перечисленными видами спорта?
Ответ. 2
Решение. Пусть x -- количество тех, кто увлекаются тремя видами спорта. По формуле включений и исключений получаем, что в объединении множеств баскетболистов, хоккеистов и волейболистов 16+17+18-(3+x)-(4+x)-(5+x)+x школьников. С другой стороны, их 38-3=35. Значит, 35=51-12-2x. Получаем: x=2.

18. На конференцию приехало 100 учёных. За время конференции каждый учёный успел обменяться рукопожатиями с 25 коллегами. Сколько было сделано рукопожатий?
Ответ. 1250.
19. Представим себе волейбольную сетку размера 30×150 квадратиков. Какое наибольшее количество "перегородок" можно разрезать так, чтобы сетка не распалась?
Ответ. 7600.
Решение. Представим сетку в виде графа, где вершинами будут узлы сетки, а рёбрами — соединяющие перегородки.
Чтобы сетка не распалась нужно оставить связный граф. Минимальный связный граф — дерево.
В сетке 30×150 будет 31 ряд из узлов, по 151 узлу в каждом. Всего 1581 вершин. Значит, нужно оставить 1581 - 1 =1580 ребер.

Всего в изначальном графе 151 рядов вертикальных перегородок, по 30 в каждом.
Аналогично, 31 ряд горизонтальных, по 150 в каждом.
Всего 31·150 + 151·30 = 4650 + 4530 = 9180. Тогда можно убрать 9180 - 1580 =7600.
20. Гриша задумал четыре числа и посчитал их попарные суммы. Чему равна сумма задуманных чисел, если он получил суммы: 8, 10, 12, 13, 15, 17?
Ответ. 25.
Решение. Заметим, что наибольшая сумма получается при сложении двух наибольших чисел. А наименьшая сумма получается при сложении двух наименьших чисел. Раз чисел всего 4, то два наибольших и два наименьших — это и есть все наши четыре числа. Тогда сумма всех 4 чисел равна 8+17=25.