

Лемма о рукопожатиях

5-6 классы

1. На конференцию приехало 100 ученых. Во время церемонии открытия каждый пожал руку пяти другим. Сколько рукопожатий было совершено? **Подсказка: не 500.**
2. Во дворе стоят 10 берёз и 6 фонарных столбов. Между ними натянуты бельевые верёвки так, что к каждому столбу привязано 7 верёвок, а к каждой берёзе - 5. Сколько во дворе бельевых верёвок? **Подсказка: не 92.**
3. Можно ли 21 компьютер соединить проводами так, чтобы каждый был соединён с 11 другими?
4. Можно ли изобразить на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекал ровно 3 других?

Лемма о рукопожатиях.

Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу рёбер, то есть чётна.

Доказательство. Заметим, что у каждого ребра два конца. Каждый из них вносит вклад +1 в сумму степеней вершин. Значит, сумма степеней вершин равна числу концов рёбер, то есть вдвое больше числа рёбер.

Следствие.

В любом графе число вершин нечетной степени чётно.

Полный граф - граф, в котором каждая вершина соединена с каждой другой.

Пример. Сколько рёбер в полном графе, если в нём 5 вершин?

Решение. Каждая вершина в таком графе имеет степень 4. Значит сумма степеней равна $4 \cdot 5 = 20$. Но при таком подсчёте каждое ребро учитывается дважды. Значит, рёбер на самом деле в 2 раза меньше, то есть 10.

5. В стране 2021 город. Из столицы выходит 25 дорог, из города Захолустного выходит всего одна дорога, а из всех остальных городов - по 20 дорог. Путешественник хочет добраться от Захолустного до столицы. Докажите, что он может справиться с поставленной задачей.
6. В некоторой стране из каждого города выходит ровно 2022 дорог, причём из любого города можно по дорогам добраться до любого другого. Снегом замело одну из дорог. Докажите, что и после этого можно из любого города добраться до любого.
7. Можно ли все рёбра полного графа с 21-ой вершиной раскрасить в 21 цвет таким образом, чтобы все рёбра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?